Variograma Matern

Salvador Pintos

marzo 2012

1. Definición

El variograma Matern aparece en la literatura geoestadística como:

$$variog(h) = sill\left(1 - \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{pr}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{h}{pr}\right)\right) \qquad (1)$$

depende de 3 parámetros:

- sill varianza del proceso
- ν parámetro de forma
- pr parámetro de escala asociado al rango ya que participa en la expresión del variograma en el cociente $\frac{h}{pr}$.

Siendo K_{ν} la función de Bessel modificada de segunda clase. Esta función está codificada en los paquetes matemáticos y estadísticos; en Matlab, por ejemplo, es *besselk*.

1.1. Propiedades

Cuando $z \Rightarrow 0$ $K_{\nu}(z) \sim 0{,}5\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$ entonces $\lim_{h\to 0} variog(h) = 0$, aunque no está definida en 0.

El parámetro de forma ν es un parámetro de suavidad ya que mayor ν implica menor $variog(h)$, y en consecuencia mayor continuidad espacial.

En la figura 1 se observa la forma de los variogramas para $\nu \leq 1$. Se resalta en azul el caso $\nu = 0{,}5$ que corresponde al modelo exponencial. Ya a partir de $\nu = 0{,}6$ se observa un cambio en la concavidad. Los modelos son con pendiente no nula en el origen. La figura 2 muesta las formas de las curvas para valores crecientes de $\nu = 1, 2, 3, 4, 6, 10, 40$. En azul el caso $\nu = 1$ y en rojo los restantes aumentando la continuidad espacial con ν. Se ha agregado además en negro el caso del variograma gaussiano para que se observe que cuando $\nu \Rightarrow +\infty$ el variograma Matern converge al variograma gaussiano.

Fijados el sill y el rango, el agregar un parámetro adicional permite una familia de curvas versátiles de variograma que van desde las de concavidad negativa (como la exponencial) a las que se inician con concavidad positiva para

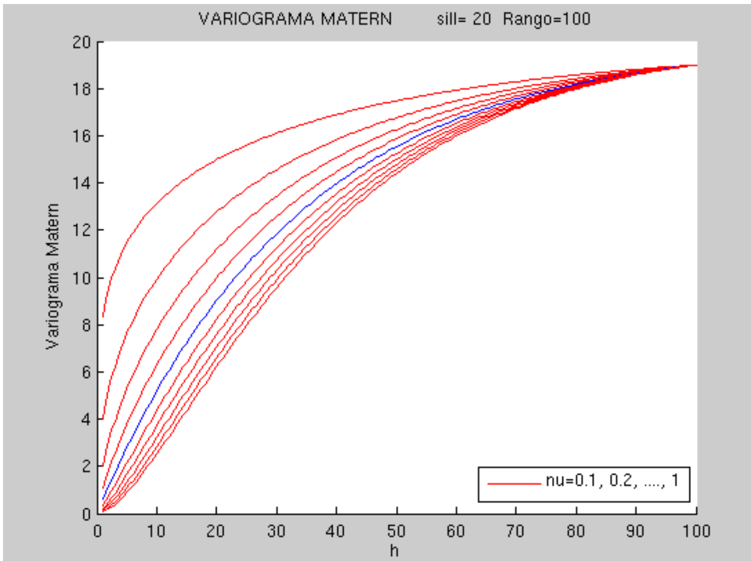

Figura 1: Variogramas Matern para $\nu = 0{,}1,\ 0{,}2 \ldots..,\ 1$ $sill = 20$ $Rango = 100$

luego cambiar a negativa, como la gaussiana. Estos dos modelos antes mencionados son casos particulares del modelo Matern, $\nu = 0{,}5$ para la exponencial, y $\nu \Rightarrow +\infty$ para la gaussiana.

1.2. Relación entre pr y el rango

Puesto que el parámetro de escala no es directamente el rango, es necesario establecer la relación entre el rango experimental del modelo y los parámetros. Resolver numéricamente la ecuación $variog(h) = 0{,}95$ conduce a una función $Rango(\nu)/pr$ dada por el cuadro 1, para valores de ν entre 0 y 1.

Para $\nu > 1$ la relación entre $(Rango(\nu)/pr)^2$ y ν es lineal y con un excelente ajuste:

$$(Rango(\nu)/pr)^2 = a + b\nu$$

con $a = 5{,}1634$ y $b = 12{,}0324$. De la ecuación anterior se obtiene:

$$pr = \frac{Rango(\nu)}{\sqrt{a + b\nu}} \tag{2}$$

Luego, dado un variograma cualquiera, por la forma se tendrá un ν tentativo, y con éste y el Rango se deduce pr.

Cuando $\nu \geqq 1$ la ecu. 2 permite calcular el parámetro pr para distintos valores del Rango y ν.

Cuadro 1: Relación Rango(ν)/pr para $\nu = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ldots,\ 1$

ν	$Rango(\nu)/pr$
0.1	1.393
0.2	2.0
0.3	2.407
0.4	2.7262
0.5	3.0
0.6	3.233
0.7	3.447
0.8	3.644
0.9	3.827
1.0	4.0

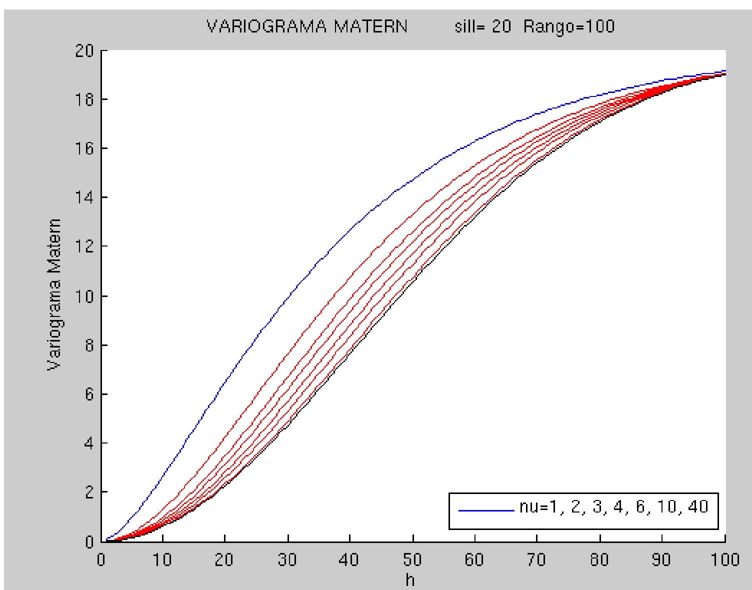

Figura 2: Variograma matern para $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 40$

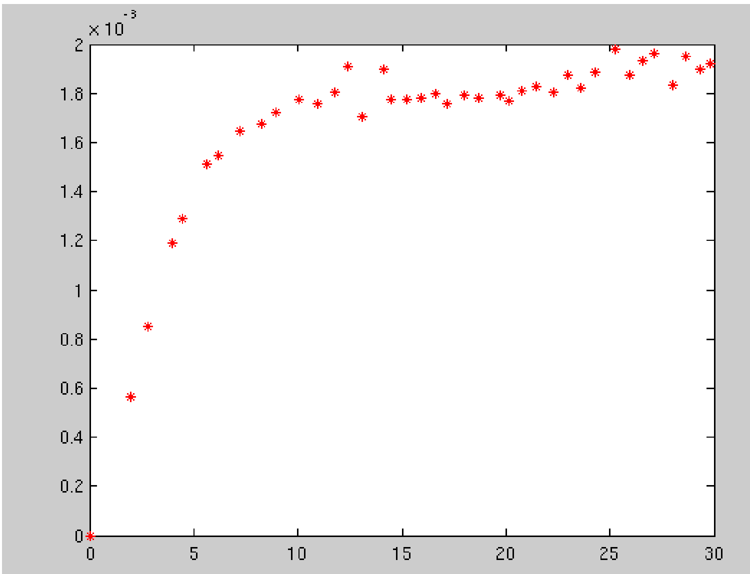

Figura 3: Variograma experimental

1.3. Ejemplo

La figura 3 presenta un variograma experimental. Los primeros valores hacen dudar de un modelo exponencial o esférico ya que la concavidad es nula en vez de negativa. Se observa un $sill \sim 0{,}002$, un posible $\nu \sim 0{,}9$, y un $rango \sim 10$.

Con la tabla de relación para $\nu = 0{,}9$ se obtiene un $pr \sim \frac{10}{3{,}827} = 2{,}613$.

Con los valores iniciales de los parámetros se ajusta el variograma Matern por mínimos cuadrados y se obtiene los parámetros finales:

$sill$	0,0018
ν	1
pr	2,4

que por la relación dada en la tabla corresponde a un $rango = 9{,}6$

Para visualizar el ajuste se presenta en la figura 4 el variograma experimental, el variograma Matern hallado (en rojo) y el exponencial (en azul). La natural concavidad negativa del variograma exponencial impide un buen ajuste en los primeros valores $0 < h < 8$; no así el Matern que ajusta perfectamente.

Optimizar el modelo de Variograma Matern (3 parámetros) es una mejor opción que anidar un exponencial más un gaussiano (4 parámetros).

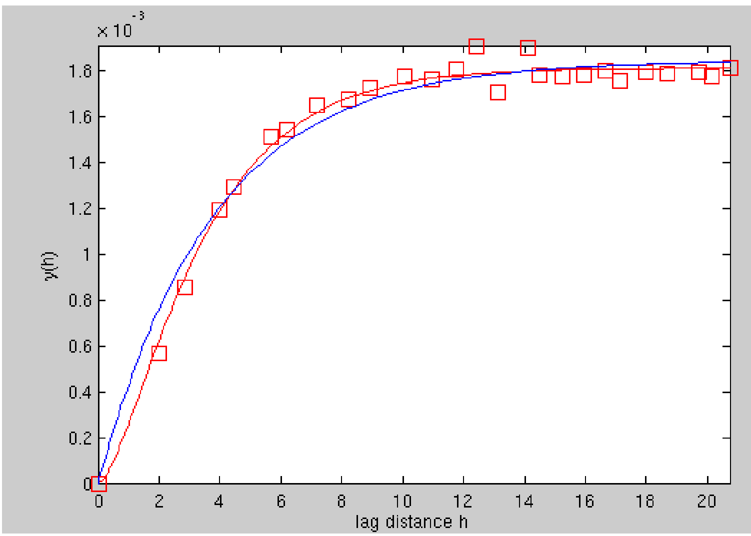

Figura 4: Variograma Matern y exponencial ajustado a la data experimental