Variograma de facies

Salvador Pintos

febrero 2014

1. El variograma

Si se considera en una región del espacio, D, una propiedad petrofísica como porosidad, saturación, permeabilidad, etc., el *paradigma estocástico* en las geociencias consiste en asumir que esta función es una realización de un proceso estocástico $Z(x)$, $x \in D$.

Dados un par de puntos (x, y), una medida natural del cambio en Z al pasar de x a y es el variograma:

$$\gamma(x,y) = \frac{1}{2} E\ (Z(y) - Z(x))^2$$

donde se nota E al valor esperado de una variable aleatoria.

Si el proceso es estacionario el variograma depende sólo del vector, $h = y - x$, diferencia entre los puntos, y no de la posición; el variograma es entonces una función $\gamma(h)$. De aquí en adelante se asumirá que el proceso es estacionario.

1.1. Su relación con la covarianza

Cuando el proceso es estacionario $Cov\,(Z(x),\, Z(y)) = Cov(h)$, ya que sólo depende de h; y se establece una relación simple:

$$Cov(h) + \gamma(h) = Cov(0)\ constante$$

siendo esta constante $Cov(0)$ la varianza del proceso que en geoestadística se denomina *sill* del variograma.

2. Variograma de variables indicadoras

Sea una facies, F, donde la probabilidad de que en un punto arbitrario, x, se presente F es p. La variable indicadora de F es:

$$I(x) = \begin{array}{lll} 1 & si\, x \in F & (probabilidad\, p) \\ 0 & si\, x \notin F & (probabilidad\, 1-p) \end{array}$$

Su valor esperado $E\,(I(x)) = p$, constante.

Interesados en la continuidad espacial de la facies, dados los puntos x e y, se llamará t a la probabilidad de que F esté presente en ambos.

La expresión $(I(y) - I(x))^2$, que da origen al variograma, es una variable aleatoria discreta dada por la tabla de valores :

$$\left[\begin{array}{ccc} & \underline{I(y)=0} & \underline{I(y)=1} \\ \underline{I(x)=0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \underline{I(x)=1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

ya que es nula si en ambos puntos la facies está presente o ausente, $I(x) = I(y)$, y es uno en caso contario $I(x) \neq I(y)$.

Sus respectivas probabilidades deducidas al tener en cuenta que las marginales deben sumar p o $1 - p$ son:

$$\left[\begin{array}{ccc} & \underline{I(y)=0} & \underline{I(y)=1} \\ \underline{I(x)=0} & 1+t-2p & p-t \\ \underline{I(x)=1} & p-t & t \end{array}\right]$$

y recordando que el valor esperado de una discreta se obtiene sumando los productos de ambas tablas (valores por probabilidad) se tiene: $E\left(I(y) - I(x)\right)^2 = 2(p - t)$. Luego:

$$\gamma(h) = {}^1\!/_2 E\left(I(y) - I(x)\right)^2 = p - t$$

Observando la matriz anterior se tiene:

$$\gamma(h) = Prob(\, I(x) = 1 \; e \; I(y) = 0 \,)$$

es decir, el variograma es la probabilidad de que la facies esté presente en el punto x y ausente en y

o viceversa:

$$\gamma(h) = Prob(\, I(x) = 0 \; e \; I(y) = 1 \,)$$

2.1. En caso de independencia

Más allá del Rango de influencia, cuando $I(x)$ e $I(y)$ son independientes, $\gamma(h) = Prob(\, I(x) = 1)\, Prob(I(y) = 0) = p(1 - p)$

2.2. La covarianza

$Cov(I(x), I(y)) = E\ (I(x), I(y)) - (EI(x))^2$ la tabla de valores del primer término es:

$$\left[\begin{array}{ccc} & \underline{I(y)=0} & \underline{I(y)=1} \\ \underline{I(x)=0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \underline{I(x)=1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

considerando la misma tabla de probabilidades el único producto no nulo es t, el valor esperado es t. ntonces:

$$Cov(h) = Cov(I(x), I(y)) = t - p^2$$

se mantiene la relación $\gamma(h) + Cov(h) = p - t + t - p^2 = p(1 - p) \quad constante.$